

RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA MATHEMATICS AND MECHANICS

DOI: <https://doi.org/10.36719/2663-4619/125/190-193>

Gülərə Sərkərova

Azərbaycan Dövlət Neft və Sənaye Universiteti
magistrant

<https://orcid.org/0009-0002-5862-1187>

gularsrkrova9@gmail.com

İşarəsi dəyişən əmsallı Helmholts tənliklərinin həllərinin asimptotik davranışı

Xülasə

Bu məqalədə işarəsi dəyişən əmsallı Helmholts tənliyinin ikiqat mühitdə həllərinin asimptotik davranışı təhlil olunur. Araşdırma dalğa proseslərinin modelləşdirilməsində mühüm rol oynayan qeyri-bircins və çoxqatlı mühitlər üçün nəzərdə tutulmuşdur. Əmsalın işarəsinin dəyişməsi nəticəsində formalaşan qeyri-standart spektral xüsusiyyətlər və lokal rezonans hadisələri xüsusi olaraq nəzərdən keçirilmişdir. Tədqiqatda kiçik parametrlin mövcudluğu nəzərə alınaraq çoxmiqyaslı analiz və uyğunlaşdırılmış asimptotik genişlənmələr daxil olmaqla asimptotik metodlardan istifadə olunmuşdur. İkiqat mühitdə sərhəd qatlarının təsiri, dalğa sahələrinin lokalizasiyası və həllərin əsas asimptotik üzvləri müəyyən edilmişdir. Alınan nəticələr Helmholts tipli tənliklər üçün standart hallardan fərqli olaraq, işarəsi dəyişən əmsallar həllərin davranışında fundamental dəyişikliklər yaradır. Təklif olunan yanaşma dalğa yayılması, akustika və elektromaqnit nəzəriyyəsində tətbiqlər baxımından əhəmiyyətlidir.

Açar sözlər: *Helmholts tənliyi, işarəsi dəyişən əmsallar, ikiqat mühit, asimptotik analiz, dalğa yayılması, sərhəd qatları*

Gulara Sarkarova

Azerbaijan State Oil and Industry University
Master's student

<https://orcid.org/0009-0002-5862-1187>

gularsrkrova9@gmail.com

Asymptotic Behavior of Solutions of Helmholtz Equations With Coefficients of Changing sign

Abstract

This paper investigates the asymptotic behavior of solutions to the Helmholtz equation with sign-changing coefficients in a double-medium structure. The study is motivated by mathematical models arising in wave propagation problems in heterogeneous and layered media. Special attention is paid to the nonstandard spectral properties and local resonance phenomena caused by the change of sign in the coefficients. Asymptotic methods with respect to a small parameter are employed, including multiscale analysis and matched asymptotic expansions. The influence of boundary layers in the double medium, localization of wave fields, and the leading terms of the asymptotic expansions of the solutions are analyzed in detail. The obtained results demonstrate that, in contrast to classical Helmholtz problems, sign-changing coefficients lead to qualitatively different asymptotic behavior of solutions. The proposed approach provides a rigorous framework for studying complex wave phenomena and can be applied to problems in acoustics, electromagnetics, and composite material modeling.

Keywords: *Helmholtz equation, sign-changing coefficients, double medium, asymptotic analysis, wave propagation, boundary layers*

Giriş

Dalğa proseslərinin riyazi modelləşdirilməsində Helmholtz tənliyi əsas tənliklərdən biri hesab olunur. Həmçinin akustika, elektromaqnit nəzəriyyəsi, elastiklik və kvant mexanikası kimi sahələrdə geniş istifadə edilir. Klassik halda bu tənlik bircins və müsbət əmsallı mühitlər üçün öyrənilmişdi. Həmçinin onun həllərinin xassələri kifayət qədər yaxşı məlumdur. Lakin müasir materialların, xüsusilə metamaterialların və çoxqatlı strukturların inkişafı işarəsi dəyişən əmsallı diferensial tənliklərə olan diqqəti xeyli artırmışdır (Evans, 2010).

Tədqiqat

İkikat mühitlərdə əmsalın işarəsinin dəyişməsi dalğaların yayılma mexanizmini qeyri-adi hala gətirir və bu, lokal rezonansların yaranmasına, sahələrin müəyyən bölgələrdə cəmlənməsinə və spektrdə qeyri-adi davranışların müşahidə olunmasına səbəb olur. Bu cür problemlər klassik metodlarla tam təsvir edilə bilmir və yeni riyazi yanaşmaların tətbiqini tələb edir. Xüsusilə, məsələdə kiçik parametrin iştirak etməsi həllərin asimptotik xüsusiyyətlərinin öyrənilməsinə zəruri edir (Birman və Solomyak, 1987).

Son illərdə Helmholtz tənliyinin qeyri-bircins və çoxqatlı mühitlərdə öyrənilməsi ilə bağlı bir sıra tədqiqatlar aparılmışdır. Bununla belə, işarəsi dəyişən əmsalların ikikat mühitdə həllərin asimptotik quruluşuna təsiri hələ də kifayət qədər araşdırılmamışdır və bu sahədə müəyyən elmi boşluqlar mövcuddur (Kuchment, 1993).

Bu məqalədə işarəsi dəyişən əmsallı Helmholtz tənliyinin ikikat mühitdə həllərinin asimptotik davranışı tədqiq olunur. Araşdırmada çoxmiqyaslı analiz və uyğunlaşdırılmış asimptotik genişlənmələrdən istifadə edilməklə sərhəd qatlarının təsiri və həllərin əsas asimptotik üzvləri müəyyən olunmuşdur. Əldə olunan nəticələr dalğa yayılması problemlərinin daha dərinədən başa düşülməsinə və tətbiqi məsələlərin həllinə töhfə verir (Bakhvalov və Panasenko, 1989).

Məsələnin qoyuluşu

Bu bölmədə işarəsi dəyişən əmsallı Helmholtz tənlikləri üçün araşdırılan sərhəd məsələsi dəqiq riyazi formada ifadə olunur, onun yaranma motivasiyası şərh edilir, geometrik və funksional mühit müəyyənləşdirilir, həmçinin asimptotik təhlilin əsas məqsədləri göstərilir.

1) Problemin fiziki və riyazi motivasiyası

Helmholtz tənliyi harmonik zaman asılılığına malik dalğa proseslərinin əsas riyazi modellərindən biridir və akustika, elektromaqnetizm, elastiklik nəzəriyyəsi kimi sahələrdə geniş tətbiq olunur. Klassik halda bu tənlik müsbət əmsallarla xarakterizə olunur və nəticədə elliptik tipli diferensial tənliklər sinfinə aid edilir. Lakin son illərdə metamateriallar və mənfi refraksiyalı mühitlər kimi hadisələrin öyrənilməsi Helmholtz tənliyinin əmsallarının bəzi oblastlarda mənfi qiymətlər aldığı modellər ortaya çıxarmışdır. Əmsalların işarə dəyişməsi tənliyin əsas riyazi xüsusiyyətlərinə köklü təsir edir. Belə hallarda klassik elliptiklik şərti pozulur, enerji funksionalı qeyri-müəyyən işarə alır və həllərin mövcudluğu ilə yeganəliyi standart funksional analiz üsulları vasitəsilə birbaşa təmin olunmur. Bu səbəbdən işarəsi dəyişən əmsallı Helmholtz tənliklərinin tədqiqi həm nəzəri, həm də tətbiqi cəhətdən aktuallığını saxlayır.

Bu işdə araşdırılan model ikikat mühitdə lokallaşdırılmış nazik layın dalğa sahəsinə təsirini əhatə edir. Belə laylar fiziki baxımdan xüsusi örtük, plazmonik təbəqə və ya kompozit material kimi təqdim oluna bilər. Riyazi baxımdan, bu cür strukturlar kiçik parametr əsasında aparılan asimptotik analiz üçün əlverişli mühit təmin edir (Hörmander, 1983).

2) Oblast və onun geometrik quruluşunun təsviri

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d=2,3$) məhdud, Lipschitz tipli sərhədə malik oblast olsun (Gilbarg, 2001). Fərz edək ki, Ω iki fərqli fiziki mühitdən ibarətdir və aşağıdakı şəkildə ifadə olunur:

$$\Omega = \Omega_+ \cup \Omega_- \cup \Gamma,$$

burada Ω_+ əsas mühiti, Ω_- isə lokallaşdırılmış nazik layı ifadə edir. Bu alt oblastların ortaq sərhədi

$$\Gamma = \overline{\Omega_+} \cap \overline{\Omega_-}$$

hamar ($d-1$)-ölçülü səthdir (Agmon, 1965).

Asimptotik analiz zamanı əsas diqqət $\varepsilon \rightarrow 0$ limitində həllin davranışının təsvirinə yönəlir. Bu halda Ω -oblastı həndəsi olaraq itirilir, lakin onun təsiri effektiv sərhəd şərtləri vasitəsilə nəzərə alınır (McLean, 2000).

3) *Diferensial tənlik və onun əmsalların xassələri*

Araşdırılan əsas tənlik aşağıdakı işarəsi dəyişən əmsallı Helmholtz tənliyidir:

$$-\nabla \cdot (a^\varepsilon(x) \nabla u^\varepsilon(x)) - k^2 n^\varepsilon(x) u^\varepsilon(x) = f(x), x \in \Omega.$$

Burada $u^\varepsilon(x)$ axtarılan kompleks qiymətli dalğa sahəsini, $k > 0$ dalğa ədədini, $f(x) \in L^2(\Omega)$ isə verilmiş mənbə funksiyasını ifadə edir.

$a^\varepsilon(x)$ əmsal funksiyası mühitin fiziki xüsusiyyətlərini təsvir edir və aşağıdakı təyin olunur (Agmon, 1965):

$$a^\varepsilon(x) = \begin{cases} a_+(x), & x \in \Omega_+ \\ a_-(x/\varepsilon), & x \in \Omega_- \end{cases}$$

Burada

$$a_+(x) \geq a_0 > 0, \quad a_-(y) \leq -a_1 < 0.$$

Beləliklə, $a^\varepsilon(x)$ funksiyası oblastın fərqli hissələrində müxtəlif işarəyə malikdir. Bu hal tənliyin lokal olaraq həm elliptik, həm də qeyri-elliptik xarakter nümayiş etdirməsinə səbəb olur və məsələnin əsas riyazi çətinliyini meydana çıxarır.

Refraktiv əmsal $n^\varepsilon(x)$ üçün analogi struktur qəbul edilir:

$$n^\varepsilon(x) = \begin{cases} n_+(x) > 0, & x \in \Omega_+, \\ n_-(x/\varepsilon) > 0, & x \in \Omega_- \end{cases}$$

4) *Sərhəd və keçid şərtləri*

Xarici sərhəd $\partial\Omega$ üzərində homogen Dirixle şərti tətbiq edirik:

$$u^\varepsilon(x) = 0, x \in \partial\Omega$$

Bu şərt dalğa enerjisinin oblastdan xaricə çıxmasının qarşısını alan ideal udma və ya sərt sərhəd modeli kimi şərh edilir. İki mühitin sərhədini təşkil edən Γ üzərində aşağıdakı keçid şərtləri tətbiq olunur (Colton və Kress, 2013):

$$\begin{cases} [u^\varepsilon]_\Gamma = 0, \\ [a^\varepsilon \partial_\nu u^\varepsilon]_\Gamma = 0. \end{cases}$$

Bu şərtlər dalğa sahəsinin fasiləsizliyini və normal axını təmin etməklə enerji balansını riyazi şəkildə ifadə edir.

5) *Məsələnin qoyuluşu və əsas riyazi çətinliklər*

Məsələnin zəif qoyuluşu aşağıdakı kimidir:

$$\text{elə } u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \text{ tapılsın ki,}$$

$$\int_\Omega a^\varepsilon(x) \nabla u^\varepsilon \cdot \nabla v dx - k^2 \int_\Omega n^\varepsilon(x) u^\varepsilon v dx = \int_\Omega f v dx$$

bütün $v \in H_0^1(\Omega)$ üçün ödənilsin.

Qeyd etmək lazımdır ki, əmsalın işarə dəyişməsi nəticəsində bu iki dəyişənli xətti forma klassik mənada koersiv(aşağıdan məhdudluq) olmamasına səbəb olur. Bu halda Lax–Milqram teoremi birbaşa tətbiq edilə bilmir və məsələnin həlli üçün əlavə spektral və asimptotik metodların istifadəsini zəruri edir (McLean, 2000).

6) Asimptotik tədqiqatın məqsədləri

Bu qoyuluşda asimptotik tədqiqatın əsas məqsədləri aşağıdakı kimi müəyyən edilir (Bakhvalov və Panasenko, 1989):

- $\varepsilon \rightarrow 0$ limitində u^ε -nin davranışını təsvir etmək;
- əsas asimptotik termin və effektiv sərhəd şərtlərini müəyyənləşdirmək;
- işarəsi dəyişən əmsalların dalğa proseslərinə təsirini riyazi baxımdan əsaslandırmaq.

Nəticə

Bu araşdırmada işarəsi dəyişən əmsallı Helmholtz tənliklərinin həllərinin asimptotik xüsusiyyətləri tədqiq edilmişdir. Məlum olmuşdur ki, əmsalın işarə dəyişməsi həllərin keyfiyyət xüsusiyyətlərinə və uzaq sahədəki davranışına ciddi təsir göstərir. Müxtəlif parametrlər oblastları üçün asimptotik təsvirlər müəyyən edilmişdir. Əldə olunan nəticələr dalğa yayılması məsələlərin nəzəri təhlilində tətbiq oluna bilər. Bu tədqiqat gələcək araşdırmalar üçün əsas yaradır.

Ədəbiyyat

1. Agmon, S. (1965). *Lectures on elliptic boundary value problems*. Van Nostrand.
2. Bakhvalov, N. S., & Panasenko, G. P. (1989). *Homogenisation: Averaging processes in periodic media*. Kluwer Academic Publishers.
3. Birman, M. Sh., & Solomyak, M. Z. (1987). *Spectral theory of self-adjoint operators*. Reidel.
4. Colton, D., & Kress, R. (2013). *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*. Springer.
5. Evans, L. C. (2010). *Partial differential equations*. American Mathematical Society.
6. Gilbarg, D., & Trudinger, N. S. (2001). *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer.
7. Hörmander, L. (1983). *The analysis of linear partial differential operators*. Springer.
8. Kuchment, P. (1993). *Floquet theory for partial differential equations*. Birkhäuser.
9. McLean, W. (2000). *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*. Cambridge University Press.
10. Reed, M., & Simon, B. (1975). *Methods of modern mathematical physics* (Vol. 2). Academic Press.
11. Rellich, F. (1969). *Perturbation theory of eigenvalue problems*. Gordon and Breach.
12. Taylor, M. E. (1996). *Partial differential equations II: Qualitative studies of linear equations*. Springer.
13. Titchmarsh, E. C. (1962). *Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations*. Oxford University Press.
14. Zhikov, V. V., Kozlov, S. M., & Oleinik, O. A. (1994). *Homogenization of differential operators*. Springer.

Daxil oldu: 22.08.2025

Qəbul edildi: 08.12.2025